



一紙上山峰

I. 對象：中一學生

II. 相關課題：指數與倍數

III. 目標：

1. 數學知識 – 以直觀法了解倍數與指數的數值變化和分別
2. 解難能力 – 選擇正確的策略解決問題
3. 溝通能力 – 解釋他們解決問題的過程

IV. 總時即：約 45 分鐘

任務一

目標： 探索倍數與指數的數值變化

時限： 10 分鐘

1. 假設每張紙的厚度是 2 mm 及只能平放於平面上。
2. 我們最少有兩個方法增加的厚度。

方法一：把白紙重疊起來。

例： 原本有白紙 1 張，總厚度是 2mm

多加 1 張紙後，紙張總數為 2 張，總厚度是 $2 \times 2 = 4$ mm

多加 2 張紙後，紙張總目為 3 張，總厚度是 $2 \times 3 = 6$ mm

方法二：把一張白紙每對摺一次，其厚度會按原本的厚度增加一倍。

例： 原本有白紙 1 張，總厚度是 2mm

對摺 1 次後，紙張數目為 2 張，即 $2 \times 2 = 4$ mm

對摺 2 次後，紙張數目為 $1 \times 2 \times 2 = 4$ 張，即 $2 \times 2 \times 2 = 8$ mm

問題

1. 完成下表。

加紙的情況			對摺的情況		
加紙的數目	算式	厚度(mm)	一張紙對摺的次數	算式	厚度(mm)
0	只有一張白紙	2	0	只有一張白紙	2
1	$2 + 2$ $= 2(2)$	4	1	2×2 $= 2^2$	4
2	$2 + 2 + 2$ $= 3(2)$	6	2	$2 \times 2 \times 2$ $= 2^3$	8
3			3		16
4			4		
5			5		
6			6		
7			7		
8			8		
9			9		
10			10		

2. 從以上的表中，假設 n 是大於 0，你猜想 $7n$ 的值或 7^n 的值大？為甚麼？

任務二

目標： 讓學生利用倍數和指數作為解難工具

時限： 20 分鐘

1. 已知珠穆朗瑪峰高 8 848 米 = 8 848 000 mm。
2. 假設每張紙的厚度是 2 mm 及只能平放於一平面上。

問題：

1. 假設現在我們無需考慮紙張的大小及數目，我們如何用最少數目的紙張令紙張的厚度可以到達珠穆朗瑪峰頂？請列明計算步驟。

2. 你以上提議的方法，在現實生活中可行嗎？為甚麼？

任務三

目標： 進一步運用指數作為解難工具

時限： 15 分鐘

問題

閱讀以下的文章，並回答下列問題。

預早開奶 細菌溫床

夜闌人靜，小寶寶突然哇啦哇啦的哭過不停，擦著睡眼的家長立即跑向雪櫃，將早前沖好的奶粉翻熱，逗哄寶寶飽吃一頓，然後乖乖入睡。對於分秒必爭的在職父母來說，這個情景或每天都在重複。

然而，預早「開奶」正是細菌滋生的溫床，英國專家的研究發現，不少奶粉本身經已含有細菌，這些奶水若存放在室溫下，細菌於半小時內將激增 1 倍。有本地兒科醫生呼籲，母乳不單營養價值較佳，其貯存能力也遠高於奶粉。

面對這種嬰兒食品潛在危機，研究小組進一步探討儲存奶水的最佳方法。小組其後發現，若奶水放入雪櫃保存，細菌量每 10 小時會增加 1 倍；但如果存放在室溫下，細菌僅在 30 分鐘即可倍增。

港兒科專科醫生陳以誠向本報解釋，可出現在奶水的細菌包括沙門氏菌、大腸桿菌或導致腦膜炎的歧氏腸桿菌（*Enterobacter sakazakii*）等，至於嬰兒最終會否發病，則視乎進食的細菌數量及嬰兒本身的抵抗力。

坦言，平日不時接獲家長處理奶粉不當、導致寶寶不適求診的個案。「有些開奶 2 小時後，才給寶寶吃；有的給寶寶吃了 15 分鐘，但寶寶睡著了，在 1 小時後醒來，家長將吃剩的奶翻熱再吃，結果引致寶寶肚瀉、肚痛！」

〈文章節錄於：<http://www.hmchk.com/topic.php?page=50>〉

補充資料： 一些細菌的繁殖是靠細胞分裂進行的，即一個細胞經過某段時間後，會分為兩個，然後兩個細胞會再各自分列，變成共有四個細胞，並按此繁衍下去。

1. 假設奶水內只有十個細菌。按文章的數據，若把這瓶奶分別存放在室溫下及雪櫃，問十小時後這瓶奶內有多少個細菌？請列明計算步驟。
2. 假設父母於晚上十時預早「開奶」，該瓶奶內已有一千個細菌。若嬰兒進食多於五萬個細菌便會引致寶寶肚瀉或肚痛，問該瓶奶最多能存放於室溫下幾多小時？請列明計算步驟。[提示：需考慮每半小時細菌的數目。]

V 建議答案

任務一

1. 完成下表。

加紙的情況			對摺的情況		
加紙的數目	算式	厚度 (mm)	一張紙對摺的次數	算式	厚度 (mm)
0	只有一張白紙	2	0	只有一張白紙	2
1	$2 + 2$ $= 2(2)$	4	1	2×2 $= 2^2$	4
2	$2 + 2 + 2$ $= 3(2)$	6	2	$2 \times 2 \times 2$ $= 2^3$	8
3	$4(2)$	8	3	2^4	16
4	$5(2)$	10	4	2^5	32
5	$6(2)$	12	5	2^6	64
6	$7(2)$	14	6	2^7	128
7	$8(2)$	16	7	2^8	256
8	$9(2)$	18	8	2^9	512
9	$10(2)$	20	9	2^{10}	1024
10	$11(2)$	22	10	2^{11}	2048

2. 若 n 是大於 1， 7^n 的值大。因為指數會令數值增加較倍數快。

任務二

1. 若不用考慮紙張大小及數目，對摺紙張的方法是應用最少紙張數目而到峰頂的方法。

方法一：

$$2^{n+1} \geq 8\,848\,000$$

$$(n+1) \ln(2) \geq \ln(8\,848\,000)$$

$$(n+1) \ln(2) \geq \ln(8\,848\,000)$$

$$n+1 \geq 23.08$$

$$n \geq 22.08$$

所以若取 23 張紙對摺便可到達珠穆朗瑪峰頂

註：一個中一的學生未必能用此方法解決問題，因為他們未學 \ln 。

方法二：〈Try and Error〉

學生代入不同的數字作嘗試，但必須包括以下兩個例子。

$$2^{23} = 8\,388\,608 \leq 8\,848\,000$$

$$2^{24} = 16\,777\,216 \geq 8\,848\,000$$

因為指數 24 剛大於 8 848 000，即 23 張紙。

2. 在現實生活中，對摺的方法是不可行。因為在生活中未必能找到一張足夠大的紙對摺 23 次。當一張普通的紙章對摺數次後，便會變得太厚而不能對摺。

任務三

1. 假設奶水內只有十個細菌。

在室溫下：

$$\text{十小時} = 20 \text{ 個半小時}$$

$$\text{細菌數目} = 10 (2^{20}) = 10\,485\,760 \text{ 個}$$

在雪櫃內：

$$\text{細菌數目} = 10 (2) = 20 \text{ 個}$$

2. 方法一：

$$10 (2^n) \geq 50\,000$$

$$n \ln(2) \geq \ln(50\,000 / 10)$$

$$n \geq 12.29$$

即要取 13 個半小時，也是 6 小時 30 分鐘

註：一個中一的學生未必能用此方法解決問題，因為他們未學 \ln 。

方法二：〈Try and Error〉

學生代入不同的數字作嘗試，但必須包括以下兩個例子。

$$10 (2^{12}) = 40\,960 \leq 50\,000$$

$$10 (2^{13}) = 81\,920 \geq 50\,000$$

即要取 13 個半小時，也是 6 小時 30 分鐘

VI 評估標準

任務一

程度 1	程度 2	程度 3	程度 3+
在老師的提示下，只能正確完成問題 1。	<u>沒有提示下</u> ，能正確完成問題 1，但 <u>沒法完成問題 2</u> 。	<u>沒有提示下</u> ，能正確完成問題 1。但 <u>需要老師的協助下</u> ，方能完成問題 2 及 <u>嘗試作出解釋</u> 。	<u>沒有提示下</u> ，完成問題 1 和 2，並能附上 <u>完整解釋</u> 。

任務二

程度 1	程度 2	程度 3	程度 3+
能提供任何合理有關利用紙張到達珠穆朗瑪峰頂的方法，或省略所以計算步驟。	能指出 <u>對摺紙張</u> 的方法到達珠穆朗瑪峰頂的方法應用最少紙張數目，但計算步驟 <u>欠完整或部份不正確</u> ，而且未能指出該方法不可行的原因。	能指出 <u>對摺紙張</u> 的方法到達珠穆朗瑪峰頂的方法應用最少紙張數目，並附上 <u>完全正確</u> 計算步驟，但未能指出該方法不可行的原因。	能指出 <u>對摺紙張</u> 的方法到達珠穆朗瑪峰頂的方法應用最少紙張數目，並附上 <u>完全正確</u> 計算步驟及能指出該方法不可行的原因。

任務三

程度 1	程度 2	程度 3	程度 3+
嘗試計算題目 1 或 2，只是 <u>部份計算步驟正確</u> ，但未能正確計算答案。	只能正確解答題目 1 或題目 2 <u>其中一題</u> ，但只是 <u>部份計算步驟正確</u> 。如：題目 2 的方法 2，只列明其中一個可能性，但不足以解為甚麼是最少時數。	<u>正確解答題目 1 及 2</u> ，但 <u>部份計算步驟正確</u> 。如：題目 2 的方法 2，只列明其中一個可能性，但不足以解為甚麼是最少時數。	<u>正確解答題目一和二</u> ，並附 <u>完全正確計算步驟</u> 。