同餘數簡介

兩個整數相除時，可得出商數及餘數。我們可參看以下的例子 ：

例 1. $13 \div 6$ 得商數 2 及餘數 1。

例 2. $60 \div 5$ 得商數 12 及餘數 0。

有些應用只需要考慮餘數而不用理會商數。例如問 44135 是否 3 的倍數，我們只看 $44135 \div 3$ 時的餘數是否 0 而不在乎商數。如果兩個數 a 及 b 被同一個數 m 除時，若其餘數相同，則稱 a，b 爲模數 m 的同餘數。在數學上記作 $a \equiv b \pmod{m}$ 。

例 3. 若 $13 \div 5$ 得餘數 3，$33 \div 5$ 得餘數 3，故 33，13 爲模數 5 的同餘數，
記作 $33 \equiv 13 \pmod{5}$ 。

例 4. $58 \div 7$ 得餘數 2，$16 \div 7$ 得餘數 2，故 58，16 爲模數 7 的同餘數，
記作 $58 \equiv 16 \pmod{7}$ 。

有關同餘數的簡易定理

設 a, b 爲整數, $m > 1$ 爲固定整數.

1. 若 $a \equiv c \pmod{b}$ 且 $c \equiv d \pmod{b}$ 則 $a \equiv d \pmod{b}$

例 5. $100 \equiv 89 \pmod{11}$ 且 $89 \equiv 12 \pmod{11}$ 則 $100 \equiv 12 \pmod{11}$ 。

2. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$, 則 $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

例 6. $14 \equiv 4 \pmod{5}$ 且 $31 \equiv 1 \pmod{5}$ 則 $(14+31) \equiv (4+1) \pmod{5}$ 即 $45 \equiv 5 \pmod{5}$ 。

3. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$, 則 $ac \equiv bd \pmod{m}$

例 7. $34 \equiv 4 \pmod{6}$ 且 $11 \equiv 5 \pmod{6}$ 則 $34 \times 11 \equiv 4 \times 5 \pmod{6}$ 即 $374 \equiv 20 \pmod{6}$ 。

同餘數有很多有趣的應用，如本星期的開關問題及星期問題。此外尚有著名的韓信點兵亦可用同餘的方法解出。有關同餘數的知識可參考以下網頁：

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_01_01_2/index.html
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_07_2_02/page2.html
http://hk.geocities.com/kl_cheuk/3650P/congruences.htm
http://www.fg.tp.edu.tw/~math/source/number1.htm
http://math.ntnu.edu.tw/~li/ent-html/node16.html
http://www.princeton.edu/~matalive/VirtualClassroom/v0.1/html/lab1/lab1_3.html
http://www.cut-the-knot.org/blue/Modulo.shtml
http://schools-wikipedia.org/wp/m/Modular_arithmetic.htm
http://mathworld.wolfram.com/ModularArithmetic.html